Calcul de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\log x}{(1+x^2)^{n+1}} dx$

Alexandre Abouda

6 juillet 2025

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\log x}{(1+x^2)^{n+1}} dx.$$

Cette intégrale est convergente puisque $\frac{x^{\frac{3}{2}} \log x}{(1+x^2)^{n+1}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$ et log est intégrable en 0.

Proposition. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $I_n = -\frac{\pi}{2^{2n+1}} \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{k} \binom{2n-k}{n}$.

Considérons la fonction méromorphe $f : z \mapsto \frac{\log^2(z)}{(1+z^2)^{n+1}}$ sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ où log est la détermination principale du logarithme. Les pôles de cette fonction sont $-i$ et i et sont d'ordre $n+1$.

Lemme 1. *On a* $\operatorname{Res}(f; i) + \operatorname{Res}(f; -i) = -\frac{\pi}{2^{2n}} \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{k} \binom{2n-k}{n}$.

Démonstration du lemme 1. Calculons les résidus de f en $-i$ et i. 0n a

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}(f; i) &= \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dz^n} \left(\frac{\log^2(z)}{(z+i)^{n+1}} \right)_{|z=i} \\
&= \sum_{k+l+m=n} \frac{1}{k!l!m!} \left(\log^{(l)}(z) \log^{(m)}(z) \frac{d^k}{dz^k} \frac{1}{(z+i)^{n+1}} \right)_{|z=i}
\end{aligned}$$

par la formule de Leibniz.

Pour $a \in \mathbb{C}$, $\frac{d^k}{dz^k} \frac{1}{(a-z)} = \frac{k!}{(a-z)^{k+1}}$. En appliquant ceci pour $a = -i$ puis pour $a = 0$,

$$\frac{d^k}{dz^k} \frac{1}{(z+i)^{n+1}} = \frac{(-1)^n}{n!} \frac{d^{n+k}}{dz^{n+k}} \frac{1}{z+i} = \frac{(-1)^k (n+k)!}{n!(z+i)^{n+1+k}}$$

et

$$\log^{(m)}(z) = \begin{cases} \log z & \text{si } m = 0 \\ \frac{(-1)^{m-1}(m-1)!}{z^m} & \text{sinon} \end{cases}.$$

On en déduit

$$\operatorname{Res}(f; i) = U(i) + V(i) + W(i)$$

où

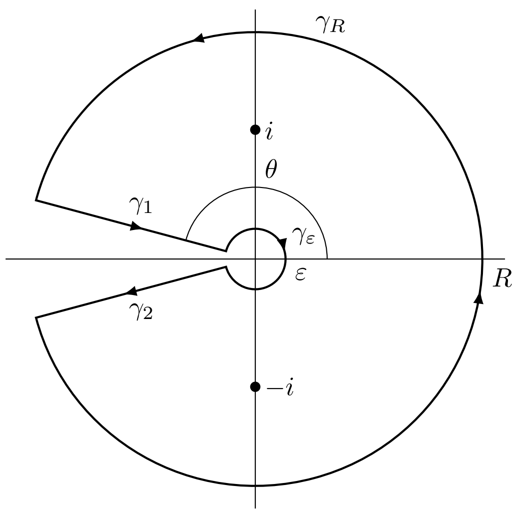
$$
\begin{aligned}
U(z) &= \frac{(-1)^n \log^2(z)}{(z+i)^{2n+1}} \binom{2n}{n} \\
V(z) &= 2\log(z) \sum_{\substack{k+m=n \\ m\geq 1}} \frac{1}{k!m!} \frac{(-1)^{m-1}(m-1)!}{z^m} \times \frac{(-1)^k (n+k)!}{n!(z+i)^{n+1+k}} \\
W(z) &= \sum_{\substack{k+l+m=n \\ l,m\geq 1}} \frac{1}{k!l!m!} \frac{(-1)^{m-1}(m-1)!}{z^m} \times \frac{(-1)^{l-1}(l-1)!}{z^l} \times \frac{(-1)^k (n+k)!}{n!(z+i)^{n+1+k}}
\end{aligned}
$$

On remarque que $\mathrm{Res}(f;-i) = \overline{\mathrm{Res}(f;i)}$, et donc

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Res}(f;i) + \mathrm{Res}(f;-i) &= 2\Re(\mathrm{Res}(f;i)) \\
&= 2V(i) \\
&= -2\pi \sum_{\substack{k+m=n \\ m\geq 1}} \frac{1}{2^{n+1+k} \times m} \binom{n+k}{n} \\
&= -\frac{\pi}{2^{2n}} \sum_{m=1}^{n} \frac{2^m}{m} \binom{2n-m}{n}
\end{aligned}
$$

□

Soient $0 < \varepsilon < 1 < R$ et $\theta \in \left]\frac{5\pi}{6}, \pi\right[$. Notons $\Gamma_{R,\varepsilon,\theta}$ le contour suivant.



Lemme 2. *Lorsque ε tend vers 0, θ tend vers π et R tend vers l'infini, $\int_{\Gamma_{R,\varepsilon,\theta}} f(z)dz$ tend vers $4i\pi I_n$.*

Démonstration du lemme 2. Notons que $|zf(z)| \leq \frac{|z|(\log^2|z|+\pi^2)}{||z|-1|^{n+1}}$ et le membre de droite tend vers 0 lorsque $|z| \to 0$ ou $+\infty$. Par le lemme de Jordan,

$$
\int_{\gamma_\varepsilon} f(z)dz \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0 \quad \text{et} \quad \int_{\gamma_R} f(z)dz \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0. \tag{1}
$$

Aussi

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz = \int_\varepsilon^R \frac{(\log(x) - i\theta)^2}{(1+x^2e^{-2i\theta})^{n+1}} e^{-i\theta} dx - \int_\varepsilon^R \frac{(\log(x)+i\theta)^2}{(1+x^2e^{2i\theta})^{n+1}} e^{i\theta} dx$$

tend vers

$$\int_0^{+\infty} \frac{(\log(x) - i\theta)^2}{(1+x^2e^{-2i\theta})^{n+1}} e^{-i\theta} dx - \int_0^{+\infty} \frac{(\log(x)+i\theta)^2}{(1+x^2e^{2i\theta})^{n+1}} e^{i\theta} dx$$

lorsque ε tend vers 0 et R tend vers l'infini. Montrons que cette quantité tend vers $4i\pi I_n$ lorsque θ tend vers π. Pour $x \in \mathbb{R}$, $|1+x^2e^{2i\theta}|^2 = 1 + 2x^2\cos(2\theta) + x^4$ d'où $|1+x^2e^{2i\theta}|^2 \geq 1 + x^2 + x^4 \geq \left(1+\frac{x^2}{2}\right)^2$ car $2\cos(2\theta) \geq 1$ lorsque $\theta \in \left]\frac{5\pi}{6}, \pi\right[$, donc

$$\left|\frac{(\log(x)+i\theta)^2}{(1+x^2e^{2i\theta})^{n+1}}\right| \leq \frac{\log^2(x) + \pi^2}{\left(1+\frac{x^2}{2}\right)^{2n+2}}$$

et le membre de droite est une fonction intégrable de x sur $\mathbb{R}_+^*$. Le théorème de convergence dominée assure que la somme des deux intégrales converge quand θ tend vers π vers

$$\int_0^{+\infty} \frac{(\log(x)+i\pi)^2}{(1+x^2)^{n+1}} dx - \int_0^{+\infty} \frac{(\log(x)-i\pi)^2}{(1+x^2)^{n+1}} dx = 4i\pi I_n.$$

[On voit ici l'intérêt d'intégrer la fonction en remplaçant log par $\log^2$]

On en déduit

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz \xrightarrow[\varepsilon\to 0\,,\,R\to+\infty\,,\,\theta\to\pi]{} 4i\pi I_n. \tag{2}$$

Le résultat du lemme est la combinaison de (1) et (2).

□

Revenons à la proposition. Soient $0 < \varepsilon < 1 < R$ et $\theta \in \left]\frac{5\pi}{6}, \pi\right[$. Par le théorème des résidus appliqué à la fonction f sur le contour $\Gamma_{R,\varepsilon,\theta}$,

$$\int_{\Gamma_{R,\varepsilon,\theta}} f(z)dz = 2i\pi(\mathrm{Res}(f;i) + \mathrm{Res}(f;-i))$$

c'est-à-dire

$$\int_{\Gamma_{R,\varepsilon,\theta}} f(z)dz = -\frac{i\pi^2}{2^{2n-1}} \sum_{k=1}^n \frac{2^k}{k}\binom{2n-k}{n}$$

d'après le lemme 1. Le lemme 2 fournit alors l'égalité voulue.

Remarque 1. En particulier $\int_0^{+\infty} \frac{\log x}{1+x^2} dx = 0$ (comme on peut le voir à l'aide du changement de variables $x \mapsto \frac{1}{x}$), et $\int_0^{+\infty} \frac{\log x}{(1+x^2)^2} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\log x}{(1+x^2)^3} dx = -\frac{\pi}{4}$.

Remarque 2. Les nombres $-\frac{2^{n+1}}{\pi} I_n$ sont les coefficients de la série de Taylor de la fonction $x \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[\mapsto -\frac{\log(\sqrt{1-2x})}{\sqrt{1-2x}}$.

En effet, pour $n \geq 1$ on note $u_n = -\frac{2^{n+1}}{\pi} I_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k2^{n-k}}\binom{2n-k}{n}$. On a $\sum_{n=1}^\infty u_n x^n = \sum_{k=1}^\infty \frac{x^k}{k} F_k(\frac{x}{2})$ où $F_k(x) = \sum_{m=0}^\infty \binom{2m+k}{m} x^k$.

Remarquons que $F_0(x) = \frac{1}{\sqrt{1-4x}}$ et si $k \in \mathbb{N}$, la relation de Pascal donne $xF_{k+2}(x) - F_{k+1}(x) + F_k(x) = 0$. Soit C la série génératrice des nombres de Catalan. Pour $|x| < \frac{1}{4}$, $xC(x)^2 - C(x) + 1 = 0$

et $C(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$. Les suites de fonctions $(F_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(x \mapsto \frac{C(x)^k}{\sqrt{1-4x}})_{k\in\mathbb{N}}$ ont le même premier terme et vérifient une même relation de récurrence, elles sont donc égales. On en déduit que

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} u_n x^n &= \frac{1}{\sqrt{1-2x}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(xC\left(\frac{x}{2}\right)\right)^k}{k} \\ &= -\frac{\log(1 - xC\left(\frac{x}{2}\right))}{\sqrt{1-2x}} \\ &= -\frac{\log(\sqrt{1-2x})}{\sqrt{1-2x}}\end{aligned}$$

d'après l'expression de $C(x)$.